

# Редукция Пуанкаре для геодезических на деформированных сферах

Д.О. Сеницын

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
механико-математический факультет

(Dated: 18 августа 2011 г.)

Изучаются геодезические на гиперповерхностях, близких к стандартной  $(n-1)$ -мерной сфере в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Следуя Пуанкаре, мы рассматриваем задачу в рамках аналитической механики и используем теорию возмущений с целью получить топологическую классификацию множества всех геодезических на поверхности. Для этого мы используем лучевое преобразование, известное в интегральной геометрии, и получаем систему осредненных уравнений движения на пуассоновой алгебре углового момента, которая оказывается гамильтоновой. Таким образом, осуществляется асимптотическая редукция исходной точной системы из  $2n - 2$  уравнений для геодезических к осредненной системе  $2n - 4$  уравнений на многообразии Грассмана  $G(2, n)$ . Скобки Пуассона в новой системе определяются алгеброй Ли группы  $SO(n)$ . В важных случаях двумерных, а также ряда трехмерных гиперповерхностей построенная редукция позволяет выполнить топологическую классификацию геодезических.

Keywords: Гамильтонова редукция, геодезические, лучевое преобразование, грассманиан, плюккеровы координаты, алгебры Ли

## I. ВВЕДЕНИЕ

Изучение геодезических линий на римановых многообразиях восходит к классической работе Якоби, который нашел точное решение для геодезических на эллипсоиде методами аналитической механики, [1]. Дальнейшее продвижение было осуществлено Пуанкаре с помощью применения топологических методов, [2] (текущее состояние проблемы см. в [3]). Изучение геодезических оставалось среди самых сложных проблем геометрии, привлекало значительное внимание и служило проверкой возможностей многих методов как в механике, так и в топологии, [3].

В недавнее время задачи о геодезических получили развитие в связи с исследованиями изоморфизмов динамических систем. Так, В.В. Козловым в [9] установлена связь задачи о геодезических на двумерном эллипсоиде со случаем Клебша для уравнений Кирхгофа движения твердого тела в идеальной жидкости. Аналогичный результат для трехмерного эллипсоида получен А.В. Борисовым и И.С. Мамаевым в [10], а для  $n$ -мерного эллипсоида – А.М. Переломовым в [12].

В работе [4] Пуанкаре предложил новый подход, совмещающий общеизвестный метод осреднения, применяемый в аналитической механике со времен Гаусса, с топологической теорией динамических систем. Метод Пуанкаре основывается на наблюдении, что если многообразие  $M^k$  близко к многообразию  $M^k$ , для которого проблема геодезических допускает точное решение, то изучение геодезических на  $M^k$  может быть осуществлено при помощи методов теории возмущений классической механики. В случае, когда  $M^k$  – стандартная  $(n-1)$ -мерная сфера

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1,$$

может быть применен метод осреднения и получена система уравнений, меньшая, чем исходная, и дающая качественное, или топологическое, описание геодезических на  $M^k$ . Данная процедура может быть названа *асимптотической редукцией* исходной системы уравнений.

Проблема редукции изучалась в небесной механике главным образом в связи с задачей трех тел, [5]. В 20-м веке интерес к ней снова возрос в связи с киральной теорией поля. Важно, что киральная модель обычно основана на группе Ли симметрии  $\mathcal{G}$ , которая составляет структурную основу ее уравнений  $\mathcal{E}$ . Это обстоятельство было использовано Полмайером, который указал метод построения меньшей системы  $\mathcal{R}$  уравнений, следующих из  $\mathcal{E}$  и описывающих движение динамических переменных, являющихся инвариантами группы симметрии  $\mathcal{G}$ , [6]. Полмайер выполнил редукцию киральной модели  $n$ -поля, в которой полевая переменная принимает значения на двумерной сфере, к уравнению синус-Гордон. Таким образом, метод Полмайера требует богатой симметрии задачи. В этом отношении широкое поле для применения редукции Полмайера представляют уравнения Лег-

гетта спиновой динамики в сверхтекучем  ${}^3\text{He}$ , имеющие группу симметрии  $SO(3) \times SU(2) \times U(1)$  (подробности см. в [7]). Редукция уравнений Леггетта особенно интересна тем, что она проливает свет на роль, играемую гамильтоновой структурой. Фактически Полмайер показал, что редукция тесно связана с алгеброй Пуассона задачи. Однако часто явная форма этой связи неочевидна. Для уравнений Леггетта редукция сводится к нахождению подалгебры пуассоновой алгебры, образованной скобками Пуассона исходных динамических переменных – спина и параметра порядка (см. [8]). В этой связи идеи Пуанкаре касательно теории возмущений и ее роли в проблеме редукции оказываются весьма плодотворными. Пуанкаре рассматривал двумерную поверхность, полученную из стандартной двумерной сферы малой деформацией, и нашел условия, при которых существуют *замкнутые геодезические*. В настоящей работе, следуя идеям [4] и [6], мы изучаем геодезические на деформированных сферах, т.е. поверхностях, мало отличающихся от стандартной сферы, получаем редуцированные уравнения и выводим топологические следствия о структуре *всего* множества геодезических, не обязательно *замкнутых*.

## II. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Мы рассматриваем  $(n - 1)$ -мерные гиперповерхности в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, близкие к стандартной сфере и задаваемые уравнением вида:

$$\varphi \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 + \varepsilon \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр и  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – функция координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Проблема разрешения данной связи, вообще говоря, весьма сложна, и нахождение параметризации этой гиперповерхности в общем случае представляет большие трудности. Более результативный подход опирается на то, что задача эквивалентна свободному движению частицы, на которое наложена приведенная выше связь, [5]. Поэтому мы можем записать уравнения геодезических в форме уравнений Лагранжа первого рода:

$$\ddot{\vec{x}} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}}. \quad (2)$$

Множитель Лагранжа  $\lambda$  задается формулой:

$$\lambda = -\frac{\dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vec{x}^2} \cdot \dot{\vec{x}}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}}\right)^2} = -\frac{\dot{\vec{x}}^2 + \varepsilon \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vec{x}^2} \cdot \dot{\vec{x}}}{\left(\vec{x} + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial \vec{x}}\right)^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \vec{x}^2}\right)_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (3)$$

При  $\varepsilon = 0$  траектории системы (2) – геодезические на сфере, т.е. большие круги. Поэтому мы можем описать геодезические на гиперповерхности, т.е. деформированной сфере, с помощью теории возмущений. Для этого мы применяем классический метод осреднения, [2].

## III. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА ДЕФОРМИРОВАННЫХ СФЕРАХ

Наши рассуждения основаны на следующем наблюдении. Рассмотрим деформированную сферу  $\mathcal{D}$ , определяемую уравнением (1), и стандартную сферу  $\mathcal{S}$ , соответствующую случаю  $\varepsilon = 0$ . Поскольку  $\varepsilon \ll 1$ , то геодезическая  $\mathcal{G}$  на  $\mathcal{D}$  может рассматриваться как спираль, витки которой близки к подходящим большим кругам  $\mathcal{S}$ . Таким образом, мы можем описать топологию  $\mathcal{G}$  с помощью движения соответствующих больших кругов  $\mathcal{S}$ . Мы можем перевести это соображение в количественную форму следующим образом. С топологической точки зрения конфигурационное пространство  $\mathcal{D}$  исходной системы – это сфера. Уравнения геодезических определяют динамическую систему на  $\mathcal{D}$ . Поскольку  $\varepsilon$  мало, то существует малый период времени  $\tau$ , в течение которого точка пробегает отрезок своей траектории, соответствующий одному витку геодезической спирали. Таким образом, конформация геодезической спирали может быть описана посредством описания эволюции больших кругов на  $\mathcal{S}$ , соответствующих виткам спирали. Но большие круги  $\mathcal{S}$  – это сечения  $\mathcal{S}$  двумерными плоскостями, проходящими через центр  $\mathcal{S}$ . Поэтому траектория, соответствующая геодезической на  $\mathcal{S}$ , порождает траекторию на

многообразии всех двумерных плоскостей в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Это многообразие, называемое многообразием Грассмана  $G(2, n)$ , известно в геометрии с середины XIX века. Фактически наш подход следует идеям Ф. Клейна и Ю. Плюккера, [18], [19], которые предложили метод конструирования новых геометрических объектов из подмногообразий данного многообразия. С топологической точки зрения, мы рассматриваем переход от системы, определенной на топологической  $(n - 1)$ -мерной сфере к системе на многообразии Грассмана  $G(2, n)$ . Переход иллюстрируется следующей диаграммой:

геодезические на деформированной сфере  $\implies$  динамическая система  $\mathcal{H}$  на многообразии Грассмана

Для осуществления изложенной схемы необходимо количественно описать движение текущего большого круга, приближающего данный виток геодезической спирали. Прежде всего, требуется выбрать способ задания положения этого круга числами – его координатами. Это означает введение координат на многообразии Грассмана. При этом существенно, что положение текущего большого круга определяется состоянием частицы, т.е. ее радиус-вектором  $\vec{x}$  и скоростью  $\dot{\vec{x}}$ , а именно текущий большой круг – это сечение сферы двумерной плоскостью, проходящей через центр сферы и содержащей эти два вектора. Рассмотрим в качестве координат этой плоскости (а значит и большого круга) следующий набор чисел:

$$l_{ij} = x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i, \quad i, j = 1 \dots n. \quad (4)$$

Это компоненты матрицы  $n$ -мерного углового момента, являющегося обобщением углового момента в трехмерном евклидовом пространстве. Последний чаще записывают в виде вектора  $\vec{L}$ , связанного с матрицей (4) соотношением  $L_i = \varepsilon_{ijk} l_{jk}$ . Очевидно,  $l_{ji} = -l_{ij}$ , т.е.  $l_{ij}$  образуют кососимметрическую матрицу. Важный факт состоит в том, что введенные величины (4) совпадают с так называемыми *плюккеровыми координатами* данной двумерной плоскости. Фактически, по формулам (4) мы вычисляем эти координаты для текущего большого круга исходя из элементов траектории частицы. В случае, когда координаты постоянны  $l_{ij} = \text{const}$ , большой круг покоится, и траектория все время остается вблизи одной и той же плоскости. Оказывается, что не все величины  $l_{ij}$ ,  $i < j$  независимы. Можно показать, [19], что они удовлетворяют следующим *соотношениям Плюккера*:

$$l_{j[k_1 k_2 k_3]} \equiv \frac{1}{3} (l_{jk_1} l_{k_2 k_3} - l_{jk_2} l_{k_1 k_3} + l_{jk_3} l_{k_1 k_2}) = 0. \quad (5)$$

Кроме того, координаты (4) однородны, т.е. умножение всех координат на одно число приводит к той же плоскости. Поэтому можно ограничиться матрицами с единичной суммой квадратов элементов:

$$\sum_{i,j} l_{ij}^2 = 1. \quad (6)$$

Отождествляя после этого матрицы  $l_{ij}$  и  $-l_{ij}$ , получаем многообразие Грассмана  $G(2, n)$  размерности  $2n - 4$ , [19].

Поскольку деформированная сфера близка к стандартной, то плоскость, определяющая текущий большой круг, движется медленно, и ее координаты (4), т.е. компоненты углового момента частицы, являются медленными переменными задачи в том смысле, что при обходе одного витка траектории их изменение мало. Далее мы описываем эту медленную динамику, используя метод осреднения.

#### IV. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ УГЛОВОГО МОМЕНТА

Используя уравнения Лагранжа первого рода (2), получаем следующие уравнения для компонент углового момента:

$$\dot{l}_{ij} = \varepsilon \lambda \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \psi(\vec{x}), \quad (7)$$

где  $\psi(\vec{x})$  – функция, определяющая деформацию сферы, (1). При  $\varepsilon = 0$  имеем  $\dot{l}_{ij} = 0$ , что соответствует случаю стандартной сферы, когда большой круг покоится.

Заметим, что правая часть уравнений (7) получается из функции деформации сферы  $\psi(\vec{x})$  с помощью применения следующего оператора:

$$m_{ij} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (8)$$

Данный оператор известен как компонента оператора углового момента в квантовой механике. Важным его свойством, используемым в дальнейшем, является следующее представление в виде оператора бесконечно малого поворота. Рассмотрим вращение в плоскости  $x_i x_j$  на угол  $\phi$ . Оно действует на векторы как умножение на известную ортогональную матрицу поворота  $R_{ij}(\phi)$ . Действие этого вращения на функции  $f(\vec{x})$  определяется как:

$$R_{ij}(\phi)f(\vec{x}) = f(R_{ij}^{-1}(\phi)\vec{x}).$$

Тогда оператор  $m_{ij}$  – генератор этого вращения функций:

$$m_{ij}f(\vec{x}) = - \left( \frac{d}{d\phi} f(R_{ij}^{-1}(\phi)\vec{x}) \right) \Big|_{\phi=0}.$$

В уравнениях для момента (7) мы удерживаем только члены 1-го порядка по  $\varepsilon$ , т.е. рассматриваем 1-й порядок теории возмущений. Кроме того, для краткости далее мы предполагаем единицы измерения выбранными таким образом, что главная часть множителя Лагранжа (3)  $\lambda_0 = -1$  (соответствует единичной скорости  $\dot{\vec{x}}^2 = 1$ , т.е. натуральной параметризации геодезической). С учетом этого уравнения для углового момента (7), с использованием введенного обозначения оператора (8), записываются в виде:

$$\dot{l}_{ij} = -\varepsilon m_{ij} \psi(\vec{x}), \quad (9)$$

Итак, мы получили уравнения (9), описывающие динамику компонент углового момента (4) частицы при ее движении по геодезической.

## V. ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТА

Поскольку правые части уравнений (9) для компонент углового момента  $l_{ij}$  пропорциональны малому параметру  $\varepsilon$ , то движение большого круга является медленным по сравнению с движением частицы вдоль витка геодезической. Иными словами,  $l_{ij}$  – медленные переменные. Для невозмущенного случая стандартной сферы они являются интегралами движения. Поэтому мы можем применить классический метод осреднения, [2]. Правые части уравнений (9) содержат медленно меняющиеся компоненты, зависящие от положения текущего большого круга, приближающего данный виток геодезической, и быстрые осциллирующие члены, зависящие от положения частицы на витке. Принцип осреднения утверждает, что крупномасштабные изменения решения зависят только от медленных компонент, а быстро осциллирующие слагаемые приводят к малым колебаниям решения около кривой, определяемой медленной частью. Таким образом, для определения топологии геодезических мы можем рассмотреть уравнения для момента (9) без осциллирующей части. Для этого необходимо осреднить их по периоду точного решения невозмущенной системы – равномерного движения по большому кругу:

$$\vec{x}_i(t) = \cos t \vec{e}_1(\hat{l}) + \sin t \vec{e}_2(\hat{l}), \quad (10)$$

где  $\hat{l}$  – это данная (постоянная) матрица углового момента,  $\vec{e}_1(\hat{l}), \vec{e}_2(\hat{l})$  – векторы, образующие ортонормированный базис в двумерной плоскости, в которой происходит движение с данным угловым моментом (конкретный выбор векторов  $\vec{e}_1(\hat{l}), \vec{e}_2(\hat{l})$  не влияет на результат осреднения).

Формула (10) определяет равномерное движение по большому кругу, аппроксимирующему текущий виток геодезической спирали. Среднее значение функции  $f(\vec{x})$  по периоду этого решения выражается формулой:

$$\langle f(\vec{x}) \rangle_{\vec{x}_i(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vec{x}_i(t)) dt \quad (11)$$

Результат осреднения зависит только от матрицы углового момента  $\hat{l}$ . Тем самым, осреднение уравнений (9) дает замкнутую систему уравнений для компонент углового момента  $l_{ij}$ :

$$\dot{l}_{ij} = -\varepsilon \langle m_{ij} \psi(\vec{x}) \rangle_{\vec{x}_i}, \quad (12)$$

где  $\psi(\vec{x})$  – функция, определяющая деформацию сферы, (1),  $m_{ij}$  – оператор, определенный в (8), известный, как оператор углового момента в квантовой механике. Напомним, что величины  $l_{ij}$  являются плюккеровыми координатами двумерной плоскости большого круга, аппроксимирующего текущий виток геодезической спирали. Поэтому фактически система (12) задана на многообразии Грассмана  $G(2, n)$ .

## VI. СВЯЗЬ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Важное наблюдение состоит в том, что использованная процедура осреднения (11) имеет связь с преобразованиями, рассматриваемыми в *интегральной геометрии*, [19], [20]. Именно, оно эквивалентно так называемому *лучевому преобразованию*  $J$ , сопоставляющему функции  $f(\vec{x})$  на стандартной сфере ее интегралы по всевозможным большим кругам. Функция-образ  $Jf$  лучевого преобразования определена на множестве больших кругов, или, эквивалентно, на множестве содержащих их двумерных плоскостей, проходящих через центр сферы, т.е. на многообразии Грассмана  $G(2, n)$ . Итак, лучевое преобразование задается формулой:

$$(Jf)(\hat{p}) = \int_0^{2\pi} f(\cos t \vec{e}_1(\hat{p}) + \sin t \vec{e}_2(\hat{p})) dt. \quad (13)$$

Здесь  $\hat{p}$  – матрица плюккеровых координат двумерной плоскости;  $\vec{e}_1(\hat{p}), \vec{e}_2(\hat{p})$  – ортонормированный базис в этой плоскости. Рис. 1 иллюстрирует случай  $n = 3$ , т.е. случай двумерной сферы, в котором лучевое преобразование носит название преобразования Функа-Минковского, см. [19].

Из сравнения формул (13) и (10), (11) мы видим, что осреднение (11) выражается через лучевое преобразование по формуле:

$$\langle f(\vec{x}) \rangle_{\vec{x}_i(t)} = \frac{1}{2\pi} (Jf)(\hat{l}).$$

Таким образом, осредненная система (9) для углового момента может быть записана в виде:

$$\dot{l}_{ij} = -\frac{\varepsilon}{2\pi} (J \circ m_{ij} \psi)(\hat{l}), \quad (14)$$

Здесь  $\psi(\vec{x})$  – функция, определяющая деформацию сферы, (1);  $m_{ij}$  – оператор, определенный в (8), известный, как оператор углового момента в квантовой механике;  $J$  – лучевое преобразование, определенное в (13).

Полученные уравнения (14) описывают осредненную динамику углового момента частицы, движущейся по геодезической. При этом компоненты момента  $l_{ij}$  являются плюккеровыми координатами двумерной плоскости текущего большого круга, и, соответственно, система (14) задана на многообразии Грассмана  $G(2, n)$ . Тем самым, осуществлена асимптотическая редукция исходной системы для геодезических с фазовой размерностью  $2n - 2$  к осредненной системе  $2n - 4$  уравнений для момента. Важный факт состоит в том, что данная система имеет гамильтонову структуру, которая обсуждается в следующем разделе.

## VII. ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА РЕДУЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ УГЛОВОГО МОМЕНТА

Гамильтонова формулировка осредненных уравнений для углового момента (14) требует задания скобок Пуассона между динамическими переменными  $l_{ij}$  и указания гамильтониана.

Скобки Пуассона для углового момента определяются алгеброй Ли  $so(n)$  и имеют вид:

$$\{l_{ij}, l_{pq}\} = \delta_{ip} l_{jq} - \delta_{jp} l_{iq} + \delta_{iq} l_{pj} - \delta_{jq} l_{ip}. \quad (15)$$

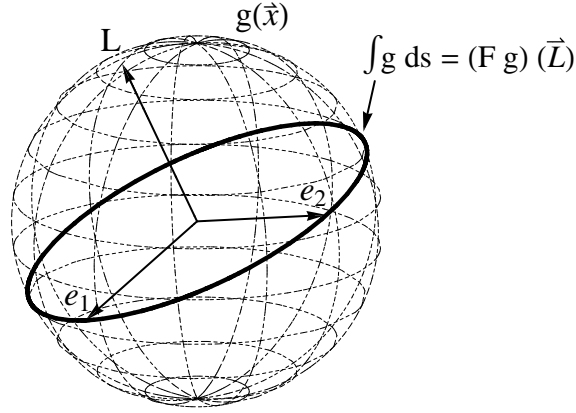


Рис. 1: Преобразование Функа-Минковского функции  $g(\vec{x})$  на единичной сфере, взятое в точке  $\vec{L}$ , – это интеграл от  $g$  по большому кругу, перпендикулярному к  $\vec{L}$ .

Ниже мы показываем, что гамильтонианом системы (14) служит следующая функция:

$$H(\hat{l}) = \frac{\varepsilon}{2\pi} J\psi, \quad (16)$$

которая получается применением лучевого преобразования  $J$ , (13), к функции  $\psi(\vec{x})$ , определяющей деформацию сферы.

Для доказательства утверждения о гамильтоновой структуре нам потребуется следующее свойство скобок Пуассона (15).

Вид скобок (15) совпадает с коммутатором в алгебре Ли  $so(n)$  базисных кососимметрических матриц  $E_{ij}$ , определяемых формулой  $(E_{ij})_{ab} = -\delta_{ia}\delta_{jb} + \delta_{ib}\delta_{ja}$ . Именно, их коммутатор имеет вид:

$$[E_{ij}, E_{pq}] = \delta_{ip}E_{jq} + \delta_{jp}E_{qi} + \delta_{iq}E_{pj} + \delta_{jq}E_{ip}. \quad (17)$$

Он может быть выражен через структурные константы  $C_{ij,pq,ab}$  алгебры Ли  $so(n)$ :

$$[E_{ij}, E_{pq}] = C_{ij,pq,ab}E_{ab},$$

которые имеют вид:

$$C_{ij,pq,ab} = \frac{1}{2} (\delta_{ip}(\delta_{aj}\delta_{bq} - \delta_{aq}\delta_{bj}) + \delta_{jp}(\delta_{aq}\delta_{bi} - \delta_{ai}\delta_{bq}) + \delta_{iq}(\delta_{ap}\delta_{bj} - \delta_{aj}\delta_{bp}) + \delta_{jq}(\delta_{ai}\delta_{bp} - \delta_{ap}\delta_{bi})).$$

Легко проверить, что структурные константы удовлетворяют соотношению  $C_{ab,pq,ij} = -C_{ij,pq,ab}$ , которое будет использовано в дальнейшем.

Кроме того, нам потребуется следующее *основное коммутационное соотношение для лучевого преобразования*:

$$J \circ m_{ij} = c_{ij} \circ J, \quad (18)$$

где  $J$  – лучевое преобразование, определенное в (13),  $m_{ij}$  – оператор, определенный в (8),  $c_{ij}$  – оператор, действующий на функцию от углового момента  $f(\hat{l})$  как взятие ее скобки Пуассона с  $l_{ij}$ :

$$c_{ij} f(\hat{l}) = \{f(\hat{l}), l_{ij}\}.$$

Для вывода соотношения (18) используем следующее свойство, определяющее действие вращений на образ лучевого преобразования. Подставляя в определение лучевого преобразования (13) вместо  $f(\vec{x})$  функцию, полученную из нее вращением  $f(R_{ij}^{-1}(\phi)\vec{x})$ , получаем:

$$(Jf(R_{ij}^{-1}(\phi)\vec{x}))(\hat{l}) = \int_0^{2\pi} f(R_{ij}^{-1}(\phi)(\cos t \vec{e}_1(\hat{l}) + \sin t \vec{e}_2(\hat{l}))) dt. \quad (19)$$

Если  $C$  – большой круг с плюккеровыми координатами  $\hat{l}$ , то правая часть (19) – это интеграл функции  $f(\vec{x})$  по повернутому кругу  $C'$ , полученному из  $C$  применением вращения  $R_{ij}^{-1}(\phi)$ . Под действием этого вращения матрица плюккеровых координат сопрягается с помощью матрицы вращения  $R_{ij}(\phi)$ . Действительно, прямое вычисление координат круга  $C'$  дает (для краткости  $R_{ij}(\phi)$  обозначено за  $R$ ):

$$\hat{l}' = x'p'^T - p'x'^T = R^{-1}x(R^{-1}p)^T - R^{-1}p(R^{-1}x)^T = R^{-1}(xp^T - px^T)R = R^{-1}\hat{l}R.$$

Итак, мы получили, что значение лучевого преобразования  $J$  от повернутой функции  $R_{ij}(\phi)f$  на большом круге с матрицей координат  $\hat{l}$  равно значению преобразования от исходной функции  $f$  на круге с сопряженной матрицей координат  $R_{ij}^{-1}(\phi)\hat{l}R_{ij}(\phi)$ :

$$((J \circ R_{ij}(\phi))f)(\hat{l}) = (Jf)(R_{ij}^{-1}(\phi)\hat{l}R_{ij}(\phi)).$$

Применяя производную по  $\phi$  в точке  $\phi = 0$ , получаем:

$$\begin{aligned} ((J \circ m_{ij})f)(\hat{l}) &= -\frac{d}{d\phi}((J \circ R_{ij}(\phi))f)(\hat{l})\Big|_{\phi=0} = -\frac{d}{d\phi}(Jf)(R_{ij}^{-1}(\phi)\hat{l}R_{ij}(\phi))\Big|_{\phi=0} = \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}}\frac{d}{d\phi}(R_{ij}^{-1}(\phi)\hat{l}R_{ij}(\phi))_{ab}\Big|_{\phi=0} = \frac{1}{2}\frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}}\left(\frac{d}{d\phi}R_{ij}(\phi)\Big|_{\phi=0}\hat{l} - \hat{l}\frac{d}{d\phi}R_{ij}(\phi)\Big|_{\phi=0}\right)_{ab} = \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}}[\hat{l}, E_{ij}]_{ab} = \frac{1}{4}\frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}}l_{pq}[E_{pq}, E_{ij}]_{ab} = \frac{1}{4}\frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}}l_{pq}(C_{pq,ij,rs}E_{rs})_{ab} = \frac{1}{4}\frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}}l_{pq}C_{pq,ij,rs}(-\delta_{ra}\delta_{sb} + \delta_{rb}\delta_{sa}) = \\ &= \frac{1}{4}\frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}}l_{pq}(-C_{pq,ij,ab} + C_{pq,ij,ba}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}}l_{pq}C_{pq,ij,ab} = \frac{1}{2}\frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}}C_{ab,ij,pq}l_{pq} = \frac{1}{2}\frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}}\{l_{ab}, l_{ij}\} = \{Jf, l_{ij}\}. \end{aligned}$$

Итак, мы получили основное коммутационное соотношение (18). Теперь мы применяем его к правой части осредненных уравнений (14) для момента и получаем, что они имеют гамильтонову структуру:

$$\dot{l}_{ij} = \{l_{ij}, H(\hat{l})\}, \quad (20)$$

где гамильтониан есть лучевое преобразование от функции деформации:

$$H(\hat{l}) = \frac{\varepsilon}{2\pi}J\psi. \quad (21)$$

### VIII. ОГРАНИЧЕНИЕ СИСТЕМЫ НА МНОГООБРАЗИЕ ГРАССМАНА $G(2, n)$ КАК НА ПУАССОНОВО ПОДМНОГООБРАЗИЕ $so(n)$

Пространство  $so(n)$  всех кососимметрических матриц  $l_{ij}$  имеет размерность  $n(n-1)/2$ . Скобка Ли-Пуассона (15) превращает его в пуассоново многообразие, на котором, вообще говоря, и определена система (20), (21). Однако, как было замечено выше, компоненты углового момента частицы (они же - плюккеровы координаты двумерной плоскости текущего большого круга) удовлетворяют соотношениям Плюккера (5). Поэтому интересные нас траектории системы (20) должны полностью лежать на многообразии, задаваемом этими соотношениями – многообразии Грассмана  $G(2, n)$  размерности  $2n-4$  (напомним, что  $l_{ij}$  – однородные координаты, и для однозначного соответствия с плоскостями нужно отождествить матрицы вида  $\alpha \hat{l}, \alpha \in \mathbb{R}$ ).

Принадлежность траекторий многообразию  $G(2, n)$  обеспечивается следующим общим фактом: это многообразие инвариантно относительно любой гамильтоновой системы со скобками (15). Это следует из того, что  $G(2, n)$  – пуассоново подмногообразие в  $so(n)$  со скобками (15). Последнее означает, что ограничение на  $G(2, n)$  скобки Пуассона двух произвольных функций на  $so(n)$  зависит только от значений этих функций на  $G(2, n)$ , [11]. Это, в свою очередь, следует из следующего свойства: скобки Пуассона левых частей соотношений Плюккера  $l_{j[k_1 l_{k_2 k_3}]}$ , задающих  $G(2, n)$ , со всеми переменными  $l_{ij}$  равны либо нулю, либо  $\pm l_{p[q_1 l_{q_2 q_3}]}$  для некоторых  $p, q_1, q_2, q_3$ . Поскольку на многообразии Грассмана  $G(2, n)$  все эти полиномы равны нулю, то в силу вышесказанного они имеют на  $G(2, n)$  нулевые скобки Пуассона со всеми переменными  $l_{ij}$ . Тем самым, они являются интегралами движения для тех траекторий гамильтоновых систем, которые стартуют с  $G(2, n)$ , а значит, эти траектории остаются на  $G(2, n)$  на всем своем протяжении.

Итак, осредненная система (20) ограничивается на инвариантное пуассоново подмногообразие  $G(2, n)$  размерности  $2n - 4$  в пространстве переменных  $l_{ij}, i < j$ , имеющем размерность  $n(n - 1)/2$ .

С точки зрения матрицы  $l_{ij}$  принадлежность многообразию  $G(2, n)$  эквивалентна разложимости в виде внешнего произведения двух векторов, или, что то же, тому, что матрица  $l_{ij}$  имеет ранг 2. В алгебре Ли  $so(n)$  эти матрицы образуют орбиту коприсоединенного представления группы  $SO(n)$ , см. [11].

## IX. ТОПОЛОГИЯ РЕШЕНИЙ РЕДУЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ КОНКРЕТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

На этапе исследования расположения геодезических на конкретных поверхностях ключевую роль играют топологические методы. В частности, для двумерных деформированных сфер с помощью построенной асимптотической редукции удастся осуществить полный топологический анализ множества геодезических. Кроме того, для трехмерных деформированных сфер вращения редуцированная система оказывается интегрируемой системой с двумя степенями свободы и допускает исследование методами топологической классификации интегрируемых систем. Рассмотрим подробнее соответствующие примеры поверхностей в каждом из этих классов.

### А. Двумерные деформированные сферы

Рассмотрим случай  $n = 3$ , т.е. случай двумерной деформированной сферы в трехмерном евклидовом пространстве, и возьмем деформацию в виде суммы четвертых степеней координат с различными коэффициентами:

$$\varphi(\vec{x}) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 + \varepsilon \psi(\vec{x}) = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \psi(\vec{x}) = \varepsilon_1 x_1^4 + \varepsilon_2 x_2^4 + \varepsilon_3 x_3^4. \quad (22)$$

Угловой момент в трехмерном пространстве имеет три существенных компоненты:  $l_{12}, l_{13}, l_{23}$ . В этом случае удобно ввести, как это обычно и делают, вместо кососимметрической матрицы  $l_{ij}$  трехмерный вектор углового момента  $\vec{L}$  по формуле:  $L_i = \varepsilon_{ijk} l_{jk}$ , что в явном виде выглядит как:

$$\vec{L} = (L_1, L_2, L_3) = (l_{23}, -l_{13}, l_{12}).$$

Скобки Пуассона для компонент вектора момента имеют вид:

$$\{L_i, L_j\} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} L_k. \quad (23)$$

Скобки (23) имеют одну функцию Казимира – квадрат момента  $\vec{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ . Фиксируя ее значение, получаем, что редуцированную систему можно ограничить на сферу  $\vec{L}^2 = \text{const}$ . Кроме того, пропорциональные векторы момента соответствуют одному и тому же большому кругу, поэтому множество больших кругов (или содержащих их двумерных плоскостей, проходящих через центр) соответствует множеству прямых в пространстве углового момента, проходящих через начало координат, т.е. проективную плоскость  $\mathbb{RP}^2$ . Итак, редуцированная система определена на грассманиане  $G(2, 3)$ , гомеоморфном проективной плоскости.



В соответствии с общей схемой (20), (21) гамильтониан редуцированной системы получается из функции  $\psi(\vec{x})$  с помощью лучевого преобразования, которое в случае двумерной сферы называют преобразованием Функа-Минковского. Для рассматриваемого возмущения четвертыми степенями (22) гамильтониан имеет вид:

$$H = \frac{3}{8} \varepsilon [\varepsilon_1 (L_2^2 + L_3^2)^2 + \varepsilon_2 (L_1^2 + L_3^2)^2 + \varepsilon_3 (L_1^2 + L_2^2)^2]. \quad (24)$$

Поскольку фазовое пространство редуцированной системы двумерно, а система гамильтонова, то она вполне интегрируема. Ее траекториями являются линии уровня гамильтониана  $H = \text{const}$  на  $\mathbb{RP}^2$ . Топологию их расположения можно изучить при помощи фазового портрета. Для этого определяются стационарные точки системы, в которых  $\dot{L}_i = 0$ . Они соответствуют геодезическим, лежащим вблизи одного большого круга. Далее, исследуется устойчивость этих стационарных точек, в результате чего они подразделяются на центры и седла. Седловые точки соединяются сепаратрисами.

В зависимости от параметров  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  гамильтониан (24) может иметь стационарные точки следующих трех видов:

S1 Существуют при любых значениях параметров  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ . Значения момента в стационарных точках удовлетворяют условиям:

- a.  $L_{10} = 0, \quad L_{20} = 0, \quad L_{30} \neq 0;$
- b.  $L_{10} = 0, \quad L_{20} \neq 0, \quad L_{30} = 0;$
- c.  $L_{10} \neq 0, \quad L_{20} = 0, \quad L_{30} = 0;$

S2 Существуют при условиях  $\varepsilon_2 \varepsilon_3 > 0, \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$ , и  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$  соответственно. Значения момента в стационарных точках удовлетворяют условиям:

- a.  $L_{10} = 0, \quad L_{20} \neq 0, \quad L_{30} \neq 0, \quad \varepsilon_3 L_{20}^2 - \varepsilon_2 L_{30}^2 = 0;$
- b.  $L_{20} = 0, \quad L_{30} \neq 0, \quad L_{10} \neq 0, \quad \varepsilon_1 L_{30}^2 - \varepsilon_3 L_{10}^2 = 0;$
- c.  $L_{30} = 0, \quad L_{10} \neq 0, \quad L_{20} \neq 0, \quad \varepsilon_2 L_{10}^2 - \varepsilon_1 L_{20}^2 = 0;$

S3 Существуют при условиях:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0 \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0 \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0 \end{aligned}$$

Значения момента в стационарных точках удовлетворяют условиям:  $L_{10} \neq 0, L_{20} \neq 0, L_{30} \neq 0$  и

$$\frac{L_{10}^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1} = \frac{L_{20}^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1} = \frac{L_{30}^2}{-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1}$$

С помощью линеаризации уравнений движения в окрестности этих точек и подсчета собственных значений находим, что эти стационарные точки являются центрами при следующих условиях (соответственно):

- S1
  - a.  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0;$
  - b.  $\varepsilon_2 \varepsilon_3 > 0;$
  - c.  $\varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0.$
- S2
  - a.  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 < 0;$
  - b.  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 < 0;$
  - c.  $-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 < 0.$
- S3 При любых  $\varepsilon_i$ .

Тем самым для любого набора параметров поверхности  $\varepsilon_i$  вычисляются стационарные точки и выясняется их разделение на центры и седла. Из анализа вышеприведенных условий на  $\varepsilon_i$  следует, что существуют следующие 4 топологически различных типа фазовых портретов редуцированной системы:

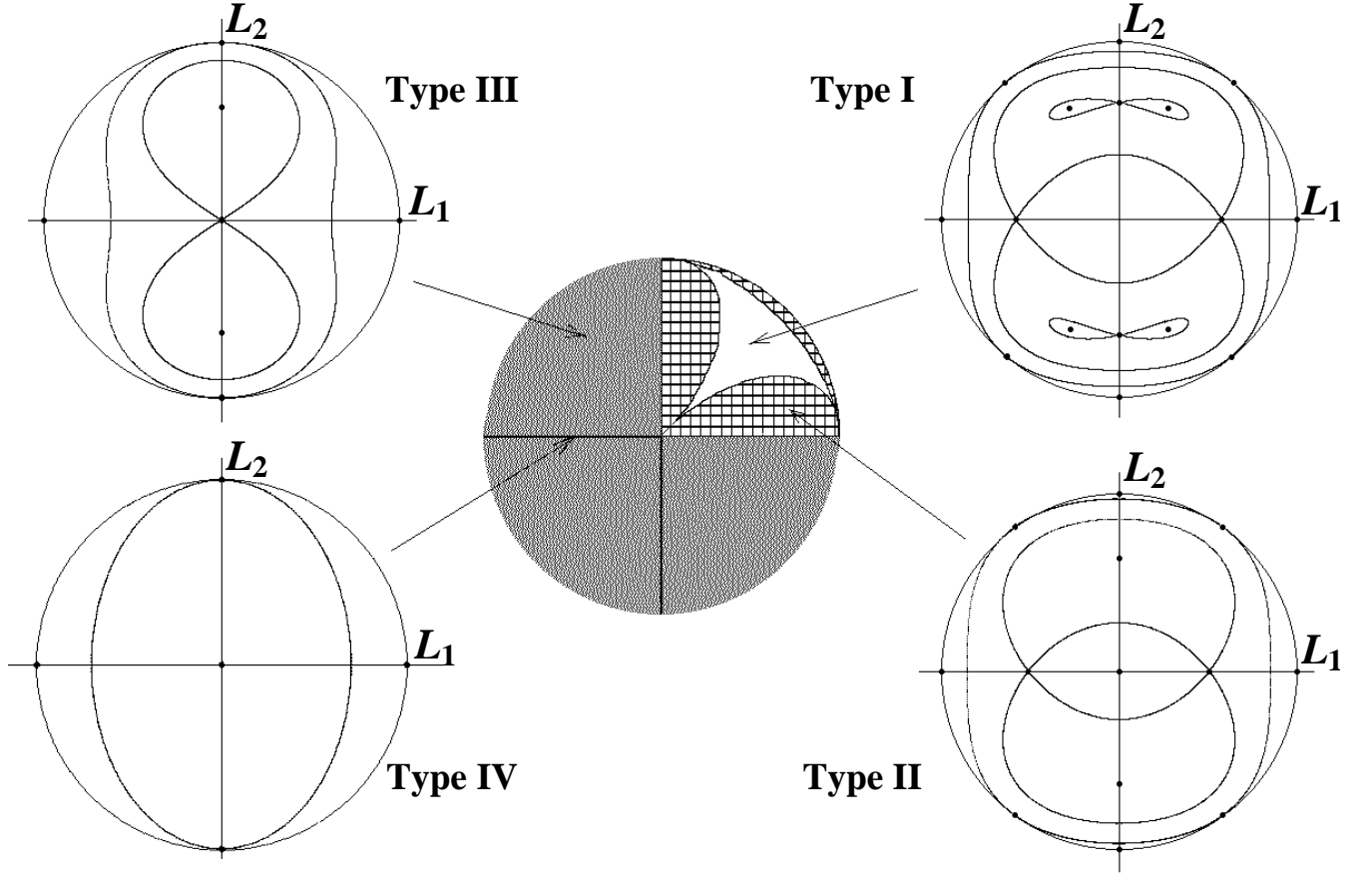


Рис. 2: Области в пространстве параметров  $\varepsilon_i$ , соответствующие типам I - IV фазовых портретов редуцированной системы. Линии, разделяющие области типов I и II задаются уравнениями (26).

Тип I 7 центров и 6 седел;  $\varepsilon_i$  подчинены условиям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0 \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0 . \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Тип II 5 центров и 4 седла;  $\varepsilon_i$  не равны нулю, имеют один знак и хотя бы одно из условий (25) не выполнено.

Тип III 3 центра и 2 седла;  $\varepsilon_i$  удовлетворяют одному из следующих условий:  $\varepsilon_2 \varepsilon_3 > 0$  и  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \leq 0$ ;  $\varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$  и  $\varepsilon_2 \varepsilon_3 \leq 0$ ;  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$  и  $\varepsilon_3 \varepsilon_1 \leq 0$ .

Тип IV 2 центра и 1 седло;  $\varepsilon_i$  удовлетворяют одному из следующих условий:  $\varepsilon_1 = 0$  и  $\varepsilon_2 \varepsilon_3 \leq 0$ ;  $\varepsilon_2 = 0$  и  $\varepsilon_3 \varepsilon_1 \leq 0$ ;  $\varepsilon_3 = 0$  и  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \leq 0$ .

Ввиду однородности правых частей редуцированной системы (20) по  $\varepsilon_i$  умножение всех  $\varepsilon_i$  на одно число не меняет фазовый портрет. Поэтому можно рассматривать комбинации этих параметров с фиксированной суммой квадратов, т.е. лежащие на сфере, и при этом достаточно рассмотреть одну полусферу. На рис. 2 изображены области на полусфере в пространстве параметров  $\varepsilon_i$ , соответствующие деформированным сферам, для которых редуцированная система имеет каждый из приведенных четырех типов фазовых портретов. Области, соответствующие типам I и II, разделяются линиями, заданными однородными уравнениями второго порядка:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 = 0 \\ 2. \quad & \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 = 0 \\ 3. \quad & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Итак, в случае двумерных деформированных сфер построенная асимптотическая гамильтонова редукция позволяет провести полный топологический анализ совокупности геодезических на поверхности путем построения фазового портрета редуцированной системы. В зависимости от параметров деформации происходят топологические перестройки фазовых портретов.

## В. Трехмерные деформированные сферы

Рассмотрим случай  $n = 4$ , т.е. геодезические на трехмерных деформированных сферах в четырехмерном евклидовом пространстве. Деформацию, аналогично двумерному случаю, выберем в виде суммы четвертых степеней координат:

$$\varphi(\vec{x}) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1 + \varepsilon \psi(\vec{x}) = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \psi(\vec{x}) = \varepsilon_1 x_1^4 + \varepsilon_2 x_2^4 + \varepsilon_3 x_3^4 + \varepsilon_4 x_4^4. \quad (27)$$

Угловой момент в четырехмерном пространстве имеет шесть существенных компонент:  $l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{23}, l_{24}, l_{34}$ . Они связаны одним соотношением Плюккера:

$$C \equiv l_{12}l_{34} - l_{13}l_{24} + l_{14}l_{23} = 0. \quad (28)$$

Алгебра Пуассона углового момента имеет две функции Казимира: приведенную выше левую часть  $C$  соотношения Плюккера, а также сумму квадратов компонент момента:  $l^2 = \sum_{ij} l_{ij}^2$ . Зафиксировав,  $C = 0$  и  $l^2 = 1$ , а также отождествляя точки, отличающиеся заменой знака у всех  $l_{ij}$ , получаем четырехмерное многообразие Грассмана  $G(2, 4)$  в качестве фазового пространства (следовательно, имеется две степени свободы).

Гамильтониан редуцированной системы, рассчитанный по общей схеме (20), (21), для рассматриваемого возмущения четвертыми степенями (27) имеет вид:

$$H = \frac{3}{8} \varepsilon [\varepsilon_1 (l_{12}^2 + l_{13}^2 + l_{14}^2)^2 + \varepsilon_2 (l_{12}^2 + l_{23}^2 + l_{24}^2)^2 + \varepsilon_3 (l_{13}^2 + l_{23}^2 + l_{34}^2)^2 + \varepsilon_4 (l_{14}^2 + l_{24}^2 + l_{34}^2)^2]. \quad (29)$$

Поскольку редуцированная система имеет две степени свободы, то для ее интегрируемости требуется один дополнительный первый интеграл, помимо гамильтониана. Рассмотрим случай осевой симметрии, когда  $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$  и функция деформации имеет вид:  $\psi(\vec{x}) = \varepsilon_1 x_1^4 + \varepsilon_2 x_2^4$ . Соответствующая деформированная сфера является поверхностью вращения: повороты в плоскости  $x_3x_4$  переводят ее в себя. Из этой симметрии следует точное сохранение компоненты углового момента  $l_{34}$  при движении частицы по любой геодезической. Это же свойство переносится и на редуцированную систему. Действительно, ее гамильтониан:

$$H = \frac{3}{8} [\varepsilon_1 (l_{12}^2 + l_{13}^2 + l_{14}^2)^2 + \varepsilon_2 (l_{12}^2 + l_{23}^2 + l_{24}^2)^2]$$

имеет нулевую скобку Пуассона с величиной  $l_{34}$ , которая тем самым представляет собой недостающий первый интеграл. По теореме Лиувилля получаем, что динамика редуцированной системы состоит в условно-периодическом движении по двумерным торах, являющимся совместными поверхностями уровня интегралов движения, т.е. задаваемым уравнениями:  $C = 0$ ,  $l^2 = 1$ ,  $H = c_1$ ,  $l_{34} = c_2$  для произвольных  $c_1, c_2$ .

На рис. 3 изображена одна из траекторий редуцированной системы в рассматриваемом случае осевой симметрии. Видно, что она замкает двумерный тор. Изучение расположения торов Лиувилля в фазовом пространстве методами топологической классификации интегрируемых систем будет предметом дальнейшего исследования.

В общем случае деформации четвертыми степенями (27), когда все коэффициенты  $\varepsilon_i$  отличны от нуля, моделирование редуцированной системы показывает, что имеются условия, когда динамика, по-видимому, имеет нерегулярный характер, и траектория замкает область в трехмерном многообразии, задаваемом постоянством энергии, рис. 4.

## С. Многомерные эллипсоиды, близкие к сфере, и случай Шоттки-Манакова в уравнениях Эйлера на алгебре Ли $so(n)$ .

Рассмотрим случай  $(n - 1)$ -мерного эллипсоида, близкого к сфере, что соответствует квадратичной функции деформации  $\psi(\vec{x})$ :

$$\varphi \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 + \varepsilon (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2) = 0.$$

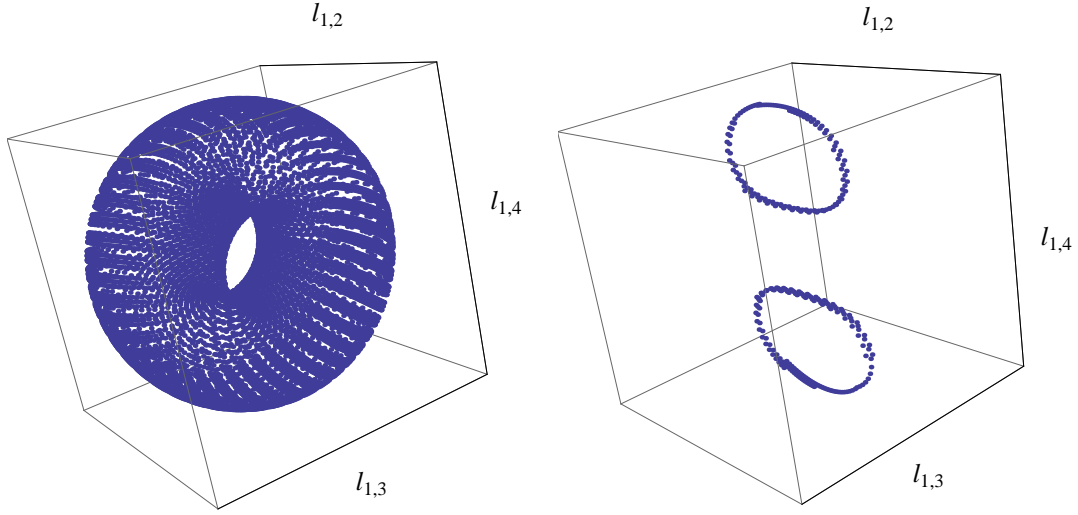


Рис. 3: Траектория редуцированной системы для трехмерной сферы с деформацией вида:  $\psi(\vec{x}) = \varepsilon_1 x_1^4 + \varepsilon_2 x_2^4$  (слева) и сечение этой траектории плоскостью (справа). Поверхность инвариантна относительно вращений в плоскости  $x_3 x_4$ , следовательно, имеется дополнительный интеграл  $l_{34}$  и редуцированная система интегрируема. В соответствии с теоремой Лиувилля, траектория замещает двумерный тор.

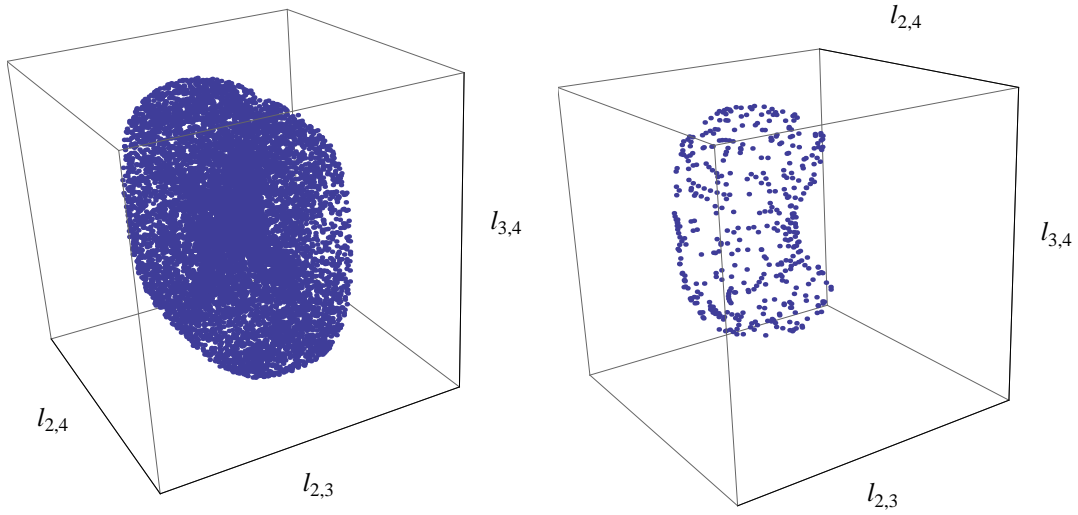


Рис. 4: Траектория редуцированной системы для трехмерной сферы с деформацией вида:  $\psi(\vec{x}) = \varepsilon_1 x_1^4 + \varepsilon_2 x_2^4 + \varepsilon_3 x_3^4 + \varepsilon_4 x_4^4$  (слева) и сечение этой траектории плоскостью (справа). Траектория замещает область в трехмерном изоэнергетическом многообразии, и динамика, по-видимому, нерегулярна.

Гамильтониан редуцированной системы по формуле (21) оказывается равен:

$$H = \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{i < j} (\alpha_i + \alpha_j) l_{ij}^2. \quad (30)$$

Нетрудно видеть, что это частный случай многомерного интегрируемого случая Шоттки-Манакова в уравнениях Эйлера на алгебре Ли  $so(n)$  [13], [14]:

$$H = \sum_{i < j} \frac{a_i - a_j}{b_i - b_j} l_{ij}^2 \quad (31)$$

при  $a_i = \alpha_i^2$ ,  $b_i = 2\alpha_i$ .

Тем самым устанавливается изоморфизм системы первого приближения для задачи о геодезических на  $(n-1)$ -мерном эллипсоиде, близком к сфере, с системой Шоттки-Манакова на алгебре  $so(n)$ .

Здесь представляет интерес следующее замечание. Выше упоминался результат В.В. Козлова, А.В. Борисова, И.С. Мамаева, А.М. Переломова о эквивалентности задачи о геодезических на  $(n-1)$ -мерном эллипсоиде случаю Клебша-Переломова для уравнений Кирхгофа на алгебре Ли  $e(n)$ . С другой стороны, имеется результат А.И. Бобенко [15] и А.В. Болсинова [16] об эквивалентности случая Клебша-Переломова на  $e(n)$  случаю Шоттки-Манакова на  $so(n+1)$  (см. также [11]). Из комбинации этих двух фактов следует, что задача о геодезических на  $(n-1)$ -мерном эллипсоиде эквивалентна случаю Шоттки-Манакова на  $so(n+1)$ . В нашей же конструкции мы получаем *асимптотическую* связь задачи о геодезических на  $(n-1)$ -мерном эллипсоиде, близком к сфере, с системой Шоттки-Манакова *меньшей размерности* – на алгебре  $so(n)$ .

## Х. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрение геодезических на слабо деформированных сферах восходит к работе Пуанкаре [4]. В ней применяется классический метод осреднения теории возмущений и выводятся условия, при которых данная геодезическая является замкнутой. В данной работе мы рассматриваем всю совокупность геодезических и получаем их описание посредством асимптотической гамильтоновой редукции исходной системы к системе с меньшим числом неизвестных.

Следующее важное наблюдение касается связи этих вопросов с интегральной геометрией. Соответствующие интегральные преобразования были открыты Минковским, Функом, Радоном, Йоном и в дальнейшем исследованы и обобщены на многомерные задачи и другие ситуации. Существенный вклад в эту область составляют труды И.М. Гельфанда, [19]. Связь проблемы геодезических с интегральной геометрией открывает возможность применения соответствующих результатов и методов к данной задаче. Отметим, что методы интегральной геометрии были применены к гамильтоновым системам Э.Б. Винбергом в работе [21].

Наконец, имеется представляющий значительный интерес класс случаев, для которых построенная редукция позволяет полностью описать расположение геодезических, используя топологические методы. Для этого анализируется топология траекторий редуцированной системы (20). В частности, для двумерных деформированных сфер фазовое пространство редуцированных систем – двумерная сфера, и топология траекторий описывается фазовым портретом на этой сфере. В случае трехмерных сфер с осевой симметрией редуцированная система есть интегрируемая система с двумя степенями свободы. Топология ее решений может быть проанализирована с помощью методов топологической классификации интегрируемых систем.

Автор благодарит В.Л. Голо за внимание к этой работе.

Работа поддержана грантами РФФИ 10-01-00748а, 11-02-01462а, Программой поддержки ведущих научных школ НШ-3224.2010.1, Программой развития научного потенциала, госконтракт 2.1.1.3704, Федеральной целевой программой «Научные и педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., госконтракты 14.740.11.0794, 02.740.11.5213.

---

[1] C.G.J. Jacoby, Vorlesungen über Dynamik, Reiner, Berlin (1884).

[2] H. Poincaré, Les methodes nouvelles de la mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris (1899).

[3] B. Dubrovin, S. Novikov, A. Fomenko, Modern Geometry. Methods and Applications. Springer-Verlag, Part 1, 1984; Part 2, 1985; Part 3, 1990.

- [4] H. Poincaré, Sur les lignes geodesique des surfaces convexes, Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), 237-274.
- [5] E.T. Whittaker, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, Ch. XIII, Cambridge University Press, Cambridge (1917).
- [6] K. Pohlmeyer, Comm.Math.Phys. **46**, 207 (1976).
- [7] J.A. Leggett, Rev. Mod. Phys. 47,331 (1975).
- [8] V.L. Golo, Lett. Math. Phys. **5**, 155 (1981).
- [9] V.V. Kozlov, Two integrable problems of classical mechanics, Vestnik MGU, Ser. math. mech., 1981, N4, P. 80-83.
- [10] A.V. Borisov, I.S. Mamaev, Nonlinear Poisson brackets and isomorphisms in dynamics, Reg. Chaot. Dynam., V 2, N 3/4, 1997, P. 72-89.
- [11] A.V. Borisov, I.S. Mamaev, Modern Methods of the Theory of Integrable Systems, Moscow - Izhevsk: Institute of Computer Science, 2003. P. 296.
- [12] A.M. Perelomov, A note on geodesics on ellipsoid, Reg. Chaot. Dynam., V 5, N 1, 2000, P. 89-94.
- [13] F. Schottky, Über das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Dimensionen, Sitzungsber. Konig. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1891, Bd. XIII, S. 227-232.
- [14] S.V. Manakov, Note on the integration of Euler's equations of the dynamics of an n-dimensional rigid body, Funct. Anal. Appl., 10(4), 328-329 (1976).
- [15] A.I. Bobenko, Euler equations on the algebras  $e(3)$  and  $so(4)$ . Isomorphism of the integrable cases, Funktsional. Anal. i Prilozhen., 20 (1986), 64-66.
- [16] A.V. Bolsinov, Compatible Poisson brackets on Lie algebras and the completeness of families of functions in involution, Math. USSR-Izv., 38:1 (1992), 69-90.
- [17] V. Golo, D. Sinitsyn, Physics of Particles and Nuclei Letters, Vol. 5, No. 3, pp. 278-281 (2008).
- [18] F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie, Berlin, Springer (1926).
- [19] I. Gelfand, S. Gindikin, M. Graev, Selected topics in integral geometry (Translations of Mathematical Monographs), American Mathematical Society (2003).
- [20] S. Helgason, The Radon Transform, Second edition, Birkhauser Boston, 1999.
- [21] E. B. Vinberg, Equivariant symplectic geometry of cotangent bundles, Mosc. Math. J., 2001, V 1, N 2, pp. 287-299.